לוגיקה (1) – תרגיל 3

1. תהי $\tau=\{P,L,I,R\}$ השפה שבה L,P סימני יחס חד מקומיים, I יחס דו מקומי ו-R יחס תלת מקומי. נחשוב על המישור הממשי כמבנה לשפה, שבו נפרש:
   - P יהיה אוסף כל הנקודות במישור ו-L יהיה אוסף כל הישרים במישור.
   - $R(x,y_1,y_2)$ מתקיים במישור אםם x,y_1,y_2 נקודות ו- $d(x,y_1)=d(x,y_2)$, כאשר $d(x,y)$ הוא המרחק בין x ל- y.
   - $I(x,y)$ מתקיים אםם x נקודה ו- y ישר ו- x נמצאת על הישר y .

   עבור המבנה הנ"ל כתבו את הנוסחות הבאות:

   א. x , y הן נקודות על אותו המעגל שמרכזו z .

   ב. l הוא ישר, q היא נקודה ו- p היא הנקודה הקרובה ביותר ב- l ל- q.

   ג. המשולש הנקבע ע"י הנקודות p_1,p_2,p_3 ישר זווית.

   ד. l הוא חוצה הזווית הנוצרת ע"י הישרים דרך הנקודות p_1,p_2,p_3 .

2. תהי N קבוצת המספרים הטבעיים S קבוצת הפסוקים בשפה L של תחשיב הפסוקים, ו- S_0 קבוצת הפסוקים היסודיים ב-L.

   א. נגדיר ברקורסיה פונקציה $F:S\to N$ באופן הבא:
   $$F(\psi)=\begin{cases}1 & \psi\in S_0\\ F(\psi_1)+1 & \psi=\neg\psi_1\\ \max\{F(\psi_1),F(\psi_2)\} & \psi=\psi_1\circ\psi_2\end{cases}.$$

   i) בסימונים שניתנו בכיתה קבעו מהי קבוצת המטרה של F ומהן הפונקציות $G_0,G_\neg,G_\circ$.

   ii) קבעו מה מחשבת הפונקציה F והוכיחו את טענתכם.

   ב. באותם הסימונים נגדיר $G_0(x)=1$, $G_\neg(x)=x+1$ ו- $G_\circ(x_1,x_2)=x_1+x_2+1$. כתבו את הפונקציה $F:S\to N$ המובטחת ממשפט הרקורסיה באותה הצורה בה נתונה הפונקציה F בסעיף הקודם. קבעו מה מחשבת הפונקציה F והוכיחו את טענתכם.

   ג. בכל המקרים שלהלן פרטו מהן $G_0,G_\neg,G_\circ$:

   i) כתבו הגדרה ברקורסיה של פונקציה F אשר בהינתן פסוק מחזירה את מספר הסוגריים בפסוק.

   ii) כתבו את הגדרת אותה הפונקציה עבור ההגדרה של יצירת פסוקים כפי שניתנה בתרגיל 2, שאלה 2.

   iii) כתבו את הגדרת הפונקציה הסופרת את מספר סימני השלילה בפסוק. האם במקרה זה יכולות בחירות שונות של אופן כתיבת הפסוקים לשנות את הפונקציה ?

3. הראו שאילו הגדרנו תחשיב פסוקים בו לא הייתה מתקיימת הקריאה היחידה אזי משפט ההגדרה ברקורסיה לא היה מתקיים. רמז: הראו שניתן לבחור $G_0,G_\neg,G_\circ$ כך שלו הייתה F כמובטח במשפט הרקורסיה אזי לכל פסוק φ , $F(\varphi)$ הוא פסוק עם קריאה יחידה.

4. כתבו את טבלאות האמת לפסוקים הבאים:

   א. $\neg(p\wedge q)$.

   ב. $\neg p\vee\neg q$.

   ג. $\neg(p\wedge q)\leftrightarrow(\neg p\vee\neg q)$.

   ד. $(p\to(q\to r))\to(q\to r)$.